E.N.S.E.T. Section A2

Durée : 4 heures

Dans tout le problème, E désigne un espace préhilbertien réel, c'est-à-dire un espace vectoriel sur le corps des réels muni d'un produit scalaire.

Si $f, g \in E$ on notera $(f \mid g)$ le produit scalaire de f et g et $\|f\|$ $(= \sqrt{(f \mid f)})$ la norme de f.

Les parties B et C sont indépendantes.

A

Soit $K : E \to E$ un endomorphisme de E que l'on suppose symétrique, c'est-à-dire tel que :

$$\forall f, g \in E \qquad (Kf \mid g) = (f \mid Kg).$$

On supposera que K n'est pas identiquement nul.

Soit $C \in \mathbb{R}$ fixé. On pose, pour $f \in E$

$$J(f) = \|f\|^4 - 2(f \mid Kf) + C.$$

1° Montrer que $\sup_{f \in E} J(f) = +\infty$.

2° Pour f et g fixés dans E, on désigne par G l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $G(\alpha) = J(f + \alpha g)$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

En utilisant cette application :

a. Montrer que les points où J réalise ses extrémas (locaux ou absolus) sont à chercher dans les ensembles

$$M_\mu = \{ f \in E \ : \ Kf = \mu f \ \text{ et } \ \|f\|^2 = \mu \} \qquad (\mu \in \mathbb{R}_+).$$

Tournez la page S. V. P.

b. Montrer que J réalise un minimum absolu en un point $f \in E$ si et seulement si celui-ci vérifie

(*) $\qquad Kf = \|f\|^2 f$

(**) $\qquad \forall g \in E \quad (g|Kg) \leqslant \|f\|^2 \|g\|^2$.

B

On suppose dans cette partie que E est de dimension finie.

Si λ est une valeur propre de K on notera E_λ le sous-espace propre associé.

1° En décomposant E en sous-espaces propres associés à K, montrer que :

a. $\sup\{(g|Kg) ; g \in E, \|g\| = 1\}$ = la plus grande valeur propre de K.

b. $\inf\{(g|Kg) ; g \in E, \|g\| = 1\}$ = la plus petite valeur propre de K.

2° Déterminer l'ensemble M des points de E où J réalise son minimum absolu et préciser la nature géométrique de M (on discutera suivant les signes des valeurs propres de K et leur ordre de multiplicité).

3° Soit $\mu \in \mathbb{R}_+$ et soit $f \in M_\mu$ (notation du A.2°).

a. On suppose ici qu'il existe au moins une valeur propre de K strictement supérieure à μ.

Montrer que si $h \in \bigoplus_{\lambda > \mu} E_\lambda$ alors, en notant λ_μ la plus petite des valeurs propres de K strictement plus grandes que μ, on a :

$$0 < \|h\| < \sqrt{2(\lambda_\mu - \mu)} \Rightarrow J(f) > J(f+h)$$

et, en notant ν la plus grande valeur propre de K :

$$\|h\| > \sqrt{2(\nu - \mu)} \Rightarrow J(f) < J(f+h).$$

b. On suppose ici qu'il existe au moins une valeur propre de K inférieure ou égale à μ.

Montrer que si $h \in \bigoplus_{\lambda \leqslant \mu} E_\lambda$ alors $J(f+h) \geqslant J(f)$

et que :

$\forall \alpha > 0, \exists h \in \bigoplus_{\lambda \leqslant \mu} E_\lambda$ tel que : $0 < \|h\| < \alpha$ et $J(f+h) > J(f)$.

4° Dans quels cas J possède-t-elle des extrémas locaux (non absolus) ?

Préciser s'il s'agit alors de minimum ou maximum local (une discussion claire et précise est exigée).

5° On appelle d la dimension de E. On range les valeurs propres de K par ordre décroissant : $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_d$, en répétant les valeurs propres autant de fois que leur ordre de multiplicité.

On notera $(u_1, u_2, \ldots, u_d)$ une base orthonormale de E formée de vecteurs propres de K telle que, pour tout i, u_i soit vecteur propre associé à λ_i. On appellera F_p l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_p$.

Si F est un sous-espace vectoriel de E, on pose

$$Q(F) = \sup\{(g|Kg) ; \|g\| = 1, \ g \in F\}$$

puis, si $0 \leqslant p \leqslant d-1$

$$q(p) = \inf\{Q(F) ; \dim F = d - p\}.$$

a. Si $\dim F = d - p$, montrer que $F \cap F_{p+1} \neq \{0\}$ et en déduire que $q(p) \geqslant \lambda_{p+1}$.

b. Montrer que $q(p) = \lambda_{p+1}$.

6° Dans cette question et la suivante, on suppose que E est égal à $\mathbb{R}^d$, rapporté à sa base canonique et muni de son produit scalaire canonique.

On suppose que K a pour matrice (k_{ij}) et que $C = \sum_{i,j} k_{ij}^2$ $(i, j \in \{1 \ldots d\})$.

Si $f = (f_i) \in \mathbb{R}^d$, mettre $J(f)$ sous une forme simple et donner une interprétation du problème de la minimisation de J.

7° On suppose de plus que K vérifie l'hypothèse (H) :

(H) $\qquad \begin{cases} \text{Pour tout } (i,j) : k_{ij} > 0. \\ \text{Pour tout } i : \sum_j k_{ij} = 1. \end{cases}$

a. Montrer que 1 est la plus grande valeur propre de K et que toutes les valeurs propres de K sont de module inférieur ou égal à 1.

Tournez la page S. V. P.

page 56 1986 E.n.s.e.t. Section A2 Mathématiques

b. Soit B la matrice déduite de celle associée à K par suppression de la première ligne et de la première colonne et soit μ_1 la plus grande valeur propre de B.

Montrer, en vous aidant de la question 5°, que $\lambda_1 \geqslant \mu_1 \geqslant \lambda_2$.

c. Montrer que $\mu_1 < 1$ et en déduire que 1 est valeur propre simple de K.

d. Déterminer les points de $\mathbb{R}^d$ où J admet un minimum et donner la valeur de ce minimum.

e. Montrer que K^2 vérifie encore l'hypothèse (H) et déduire de *c.* que -1 ne peut être valeur propre de K.

f. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$, la matrice associée à K^n converge terme à terme vers une matrice limite que l'on précisera.

C

On suppose dans cette partie que E est l'espace des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbb{R}$, muni du produit scalaire

$$(f \mid g) = \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, dx .$$

Soit $k : [-1, 1]^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall (x, y) \in [-1,1]^2 \qquad k(x, y) = k(y, x) .$$

On pose, si $f \in E$ et $x \in [-1,1]$, $Kf(x) = \int_{-1}^{1} k(x, y) f(y)\, dy$ et on appelle K l'application qui à $f \in E$ fait correspondre la fonction Kf.

1° Montrer que K est un endomorphisme symétrique de E.

2° Si $C = \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} k^2(x, y)\, dx\, dy$, donner une expression simple de $J(f)$ et une interprétation du problème de la minimisation de J.

3° On pose désormais $k(x, y) = e^{|x-y|}$ pour $(x, y) \in [-1,1]^2$. Soit $f \in E$. Montrer que $g = Kf$ si et seulement si g est de classe C^2, satisfait une équation différentielle du second ordre que l'on précisera et vérifie :

$$g(-1) + g'(-1) = g(1) - g'(1) = 0.$$

4° Déterminer les sous-espaces Ker (K) et Im (K).

5° Rechercher les valeurs propres et les vecteurs propres de l'endomorphisme K (on caractérisera les valeurs propres de K sans chercher à les calculer, mais on indiquera des intervalles disjoints contenant chacun une valeur propre et une seule).

6° Donner une caractérisation de la plus grande valeur propre positive de K. Déterminer les éléments de E où il semble le plus vraisemblable que J réalise son minimum.

Indiquer pourquoi vous ne pouvez affirmer que J réalise un minimum.

7° Donner une valeur approchée, la plus précise possible, de la plus grande valeur propre positive de K et indiquer votre méthode.